ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE’E.MATTEI’

URBINO

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEL

SECONDO ORDINE

NON OMOGENEE

Prof.AnnaMaria Paolucci

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE SOLO CON COEFFICIENTI COSTANTI

$y'' + by' + cy = r(x)$

$b\ ,\ c \in \Re$

r(x) funzione continua

L'equazione è omogenea se $r(x)=0$ $\rightarrow$ $y'' + by' + cy = 0$

L'equazione è non omogenea a coefficienti costanti:

$$y'' + by' + cy = r(x)$$

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' + by' + cy = 0$$

Teorema:

La soluzione generale dell'equazione $y''+by'+cy=r(x)$

si ottiene combinando linearmente una sua soluzione particolare $y_0=g(x)$ <u>con</u> una soluzione generale $y_1= f(x,c_1,c_2)$

dell'equazione omogenea associata: $y = y_0 + y_1$

Così per risolvere una equazione non omogenea:

- **Ricerchiamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata;**
- **Determiniamo una soluzione particolare della non omogenea;**
- **Combiniamo linearmente le due soluzioni.**

esempio: Si determini l'integrale particolare dell'equazione

$$y'' - y = x^2$$

che soddisfi alle condizioni: $y(0) = -2; \quad y'(0) = 2$

L'equazione omogenea associata è : $y'' - y = 0$

la cui equazione caratteristica è: $\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm 1$

Quindi l'integrale generale della omogenea associata è:

$$y_1 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Ora dobbiamo cercare **una soluzione particolare** dell'equazione data

$$\boxed{y'' - y = x^2}$$

notiamo che x^2 è un polinomio di II grado

e che rispetto all'equazione non omogenea a coefficienti costanti :

y''+by'+cy=r(x) ha $c \neq 0$

allora **il grado della soluzione particolare** deve essere dello **stesso grado** del polinomio r(x), per noi di II grado:

$$y_0 = ax^2 + bx + c \qquad y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

Sostituiamo in $\longrightarrow$ $\boxed{y'' - y = x^2}$ $\quad 2a - ax^2 - bx - c = x^2$

uguagliando i coefficienti abbiamo il sistema:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

La soluzione particolare y_0 sarà: $y_0 = -x^2 - 2 = -(x^2 + 2)$

l'integrale generale è $y = y_1 + y_0$ cioè:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - (x^2 + 2)$$

se $$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - (x^2 + 2)$$

Le condizioni date sono: $y(0) = -2;$ $y'(0) = 2$

Deriviamo la funzione y $$y' = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} - 2x$$

$y(0) = -2; \longrightarrow -2 = c_1 e^{0} + c_2 e^{-0} - (0+2)$ $\qquad c_1 + c_2 = 0$

$y'(0) = 2 \longrightarrow 2 = c_1 e^{0} - c_2 e^{-0} - 2\cdot 0$ $\qquad 2 = c_1 - c_2$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow y = e^{x} - e^{-x} - x^2 - 2$$

Soluzione generale

METODO DIRETTO

per la determinazione di un *integrale particolare* dell'equazione differenziale.

(1) **y''+by'+cy=r(x)** $b\ ,\ c\ \in\ \Re$

Caso I

r(x) è una funzione polinomiale in R di grado **n.**

In questo caso un integrale particolare della (1) è una funzione polinomiale di grado **n**.

Sostituendo tale **soluzione** e le sue **prime due derivate** nella **(1)** e applicando **il principio di identità dei polinomi**, si giunge ad un sistema di equazioni lineari nelle incognite c_1, c_2

In particolare, se nella **(1)** **y''+by'+cy=r(x)** $c = 0$ con $b \neq 0$

L'integrale particolare della (1) è: $q(x) = x\, w(x)$

se nella (1) **y''+by'+cy=r(x)** $c = b = 0$

L'integrale particolare della (1) è: $q(x) = x^2\, w(x)$

dove w(x) è un polinomio dello stesso grado di r(x)

esempio:

Determinare un integrale particolare della seguente equazione differenziale :

$$y''-3y'+2y=x^2+x \qquad c=2\neq 0$$

L'integrale particolare w(x) è da cercare tra i polinomi di II grado:

$w(x) = ax^2+bx+c$ a,b,c coefficienti da determinare

$w'(x) = 2ax+b$ $w''(x) = 2a$ Sostituiamo nell'esercizio

$$2a - 3(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = x^2+x$$

Ordinando il polinomio a I membro si ha:

$$2ax^2 + (2b-6a)x + 2a-3b+2c = x^2+x$$

Questa è una identità se e solo se :
$$\begin{cases} 2a=1 \\ 2b-6a=1 \\ 2a-3b+2c=0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}$$
b = 2
$$c = \frac{5}{2}$$

Sostituendo in **w(x) = ax²+bx+c**

$$w(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$$

Se l'equazione differenziale fosse stata $\longrightarrow$ $y'' - 3y' = x^2 + x$

Un integrale particolare sarebbe stato : $w(x) = x(ax^2 + bx + c)$

$$w(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{18}x^2 - \frac{5}{27}x$$

VERIFICARE

Caso II (1) **y''+by'+cy=r(x)**

Quando r(x) ha la forma: $r(x) = h \cdot e^{\lambda \cdot x}$

Se λ non è soluzione dell'equazione caratteristica della (1) un integrale particolare della (1) ha la forma:

$$\boxed{w(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}}$$

a costante da determinare

Sostituendo nella (1) la w(x) e le sue prime due derivate si ottiene una uguaglianza che diventa una identità per un opportuno valore di a.

Se λ è radice semplice dell'equazione caratteristica , l'integrale particolare ha la forma:

$$w(x)=a\cdot x\cdot e^{\lambda x}$$

Se invece λ è soluzione doppia, l'integrale particolare ha la forma:

$$w(x)=a\cdot x^2\cdot e^{\lambda x}$$

esempio:

$$y''-y'+3y=e^x$$

$$y''-3y'+2y=e^x$$

$$y''-2y'+y=e^x$$

$$y''-y'+3y=e^{x}$$

$$\lambda = 1$$

Non è soluzione dell'equazione:

$$k^2 - k + 3 = 0$$

Ne segue che l'integrale particolare ha la forma:

$$w(x) = ae^{x}$$

$$w'(x) = w''(x) = ae^{x}$$

Sostituendo si ha:

$$ae^{x} - ae^{x} + 3ae^{x} = e^{x} \longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

L'integrale cercato è:

$$\boxed{w(x) = \frac{1}{3}e^{x}}$$

$$\boxed{y''-3y'+2y=e^{x}}$$

$\lambda = 1$ è radice semplice dell'equazione caratteristica

Perciò l'integrale particolare ha la forma: $w(x) = axe^{x}$

$$w'(x)=(a+ax)e^{x} \qquad w''(x)=(2a+ax)e^{x}$$

Sostituendo

$$(2a+ax)e^{x}-3(a+ax)e^{x}+2axe^{x}=e^{x}$$

a = -1 e l'integrale particolare è:

$$\boxed{w(x)=-xe^{x}}$$

$$y''-2y'+y=e^x$$

$$\lambda=1$$

È radice doppia dell'equazione caratteristica

Perciò l'integrale particolare ha la forma

$$w(x)=ax^2e^x$$

$$w'(x)=(2ax+ax^2)e^x$$

$$w''(x)=(2a+4ax+ax^2)e^x$$

sostituendo

$$(2a+4ax+ax^2)e^x-2(2ax+ax^2)e^x+ax^2e^x=e^x$$

$$a=\frac{1}{2}$$

e l'integrale particolare è:

$$w(x)=\frac{1}{2}x^2e^x$$

La volta prossima faremo :

Caso III **(1)** **y''+by'+cy=r(x)**

Quando r(x) ha la forma:

$$r(x) = p\cos\omega x + q sen\omega x$$

……………..

ISTITUTO TECNICO INDUSTRIALE ‘E.MATTEI’

URBINO

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE

FINE

Prof.AnnaMaria Paolucci