MATEMATICA & REALTA'

Primo Brandi – Anna Salvadori

Laboratori di innovazione didattica

2008-2009

VOLUME I

Introduzione

Premessa

L’esigenza di un rinnovamento nella didattica della matematica è ormai ampiamente condivisa da tutte le componenti della scuola e dell’università. Alle *tradizionali motivazioni* interne alla dinamica didattica, principalmente legate alle difficoltà di apprendimento, si stanno aggiungendo e sovrapponendo nuove e pressanti esigenze provenienti dal mondo esterno.

L’attuale *società della conoscenza* richiede, ad ogni livello, un continuo aggiornamento delle conoscenze e delle competenze individuali. Per affrontare e risolvere problemi e compiti del quotidiano e svolgere un ruolo consapevole e attivo nella società, non solo è indispensabile saper utilizzare conoscenze ed abilità apprese a scuola, ma occorre anche essere in grado di continuare ad apprendere dopo la conclusione del percorso scolastico.

La matematica è una disciplina fortemente coinvolta in questo processo, in quanto strumento indispensabile per la descrizione e comprensione del mondo circostante. In particolare, i modelli matematici - strumento chiave del metodo scientifico - si stanno diffondendo in tutti gli ambiti, invadendo *prepotentemente* il nostro quotidiano. Da *linguaggio* elitario della scienza e della tecnologia, la modellizzazione si sta trasformando in un efficace strumento di comunicazione di massa. Una parte crescente della popolazione si avvale di software interattivo, basato su modelli matematici.

La pressante richiesta di competenze matematiche a tutti i livelli si scontra tuttavia con la difficoltà di apprendimento di questa disciplina, che negli ultimi anni sembra essersi addirittura acuita. Sempre più frequentemente gli studenti tradiscono un grave disagio nei confronti della matematica; alcune indagini recenti hanno evidenziato che è considerata una scienza astratta, lontana dalle loro esperienze e dai loro interessi, di scarsa o nessuna utilità per la vita di tutti i giorni. Una *montagna fredda e temibile*, troppo difficile da scalare, un’ impresa a cui spesso si rinuncia in partenza.

Questo disagio è peraltro confermato dai docenti, che lamentano una crescente difficoltà ad avviare il processo educativo e instaurare un dialogo costruttivo. Gli educatori trovano sempre più difficile ed estenuante interessare e coinvolgere gli allievi in un percorso di apprendimento, tenuto conto dei brevi e rari momenti che i giovani sono disposti a dedicare allo studio *codificato*.

Anche l’introduzione dell’informatica nei curricula non ha sortito gli effetti auspicati, in quanto la debole sinergia con la matematica non ha prodotto l’atteso rinnovamento.

Il Progetto M&R

Matematica&Realtà (M&R) è un progetto nazionale promosso nel 2005 dal Progetto *Innovamatica* e dal Centro PRISTEM[1] che in questa delicata fase di evoluzione dell'insegnamento della Matematica intende avanzare precise proposte didattiche intese a sviluppare nuove e insospettate relazioni con il mondo "reale", anche nella pratica quotidiana. In linea con le tematiche dell'indagine OCSE-PISA, si propone di stimolare i ragazzi ad utilizzare le conoscenze e le competenze matematiche acquisite a scuola, per orientarsi nella moderna società della conoscenza e gestire le proprie scelte in modo consapevole e attivo.

Il progetto, rivolto ai ragazzi dai 13 ai 18 anni, nasce dall'esperienza acquisita nei percorsi *Orientamatica*[2] che hanno coinvolto circa 8.000 studenti ed hanno visto la partecipazione attiva di novanta insegnanti di settanta Istituti Superiori, interessati a sperimentare un nuovo percorso didattico.

Uso del volume

Questo volume propone un percorso di introduzione alla modellizzazione matematica con strumenti elementari e fornisce una guida per Docenti e Studenti che vogliano condividere l'avventura M&R.

Concepito come integrazione del libro di testo, utilizza competenze che si presumono già acquisite dai ragazzi (nella formazione scolastica o universitaria di base) e le indirizza verso un uso appropriato nella modellizzazione.

I temi proposti hanno carattere multidisciplinare e si prestano non solo come supporto alla formazione superiore (approfondimento del programma, temi interdisciplinari per aree di progetto, tesine per l'esame di stato), ma anche per una innovazione didattica a livello universitario.

Uso delle tecnologie

Sistemi di simulazione grafica e di calcolo simbolico sono un supporto fondamentale alla presente proposta di innovazione didattica.

Infatti un uso intelligente della tecnologia permette di dedicare più tempo all'aspetto formativo, stimola il ragionamento, aiuta la comprensione dei concetti ed allarga il campo delle applicazioni.

---

[1] Il progetto *Innovamatica* (Innovazione & Matematica) e il *Centro Pristem* operano da anni con l'intento di avvicinare studenti di Istituti Superiori ed universitari, docenti di discipline scientifiche e cultori delle scienze alle interazioni tra la matematica, l'informatica e la vita quotidiana, mostrando come una formazione matematica-informatica sia ormai indispensabile per svolgere gran parte delle attività umane.

[2] I percorsi Orientamatica sono stati attivati da *Innovamatica* nel 1994 come progetto pilota di raccordo fra gli studi medi e quelli universitari. L'interesse suscitato da tali corsi sin dall'inizio, fra docenti e studenti, è ulteriormente cresciuto nei dodici anni di attività. Una delle ragioni è che i percorsi non si pongono come momento di orientamento "tradizionale", né sono rivolti esclusivamente agli studenti orientati verso studi universitari squisitamente scientifici; intendono invece introdurre un approccio sperimentale alla Matematica e una educazione alla modellizzazione per tutti gli studenti, indipendentemente dalla futura prosecuzione dei loro studi.

La proposta M&R

Il progetto *Matematica & Realtà* è nato con l'intento di offrire una gamma di opportunità:

- per un *insegnamento più tradizionale*, mettendo a disposizione numerosi modelli di supporto da sviluppare alla voce "saper fare" come "esercizi";
- per un *insegnamento più aperto alla innovazione tecnologica*, fornendo un ampio ventaglio di modelli (per il cui sviluppo è indispensabile il ricorso alle nuove tecnologie);
- per un *insegnamento aperto all'innovazione didattica*, proponendo un percorso di educazione alla modellizzazione.

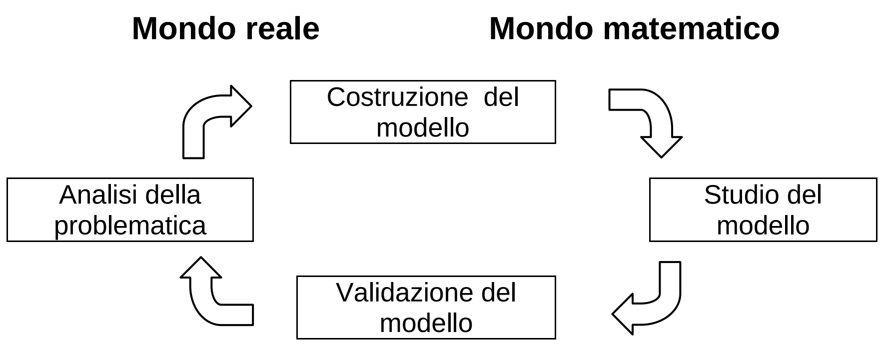
Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale.

Punto centrale della proposta è una interazione dinamica tra mondo reale e mondo matematico.

Cosa è un modello matematico?

Il modello matematico di un "fenomeno" del mondo reale è un processo di razionalizzazione ed astrazione che consente di analizzare il problema, descriverlo in modo oggettivo e formulare una sua "simulazione", utilizzando un linguaggio simbolico universale.

Il processo di modellizzazione procede per fasi successive, che creano un'interazione dinamica fra mondo reale e mondo matematico.



Fasi del processo di modellizzazione

Fase 1. Costruzione del modello. E' la fase di passaggio dal mondo reale al mondo matematico: il problema o il fenomeno da analizzare vengono "tradotti in linguaggio" matematico.

Fase 2. Studio del modello. La fase si svolge tutta all'interno del mondo matematico con l'elaborazione del modello.
La costruzione e lo studio del modello promuovono un'analisi critica del problema che porta a formulare giudizi, valutare possibili soluzioni e/o fare previsioni sulla evoluzione futura.

Fase 3. Validazione del modello. Dal mondo matematico, si torna al mondo reale per verificare l'impatto con la realtà delle soluzioni trovate "a tavolino". Questo raffronto è fondamentale in quanto consente di valutare la *bontà* del modello, cioè di stabilire se il modello è rispondente alle esigenze della problematica in oggetto.

Potenzialità della modellizzazione

Grazie all'astrazione matematica, uno stesso modello è in grado di rappresentare fenomeni, anche in ambiti molto diversi. Inoltre strumenti e tecniche possono essere adattati e/o assemblati per gestire nuove problematiche, un po' come si fa con le costruzioni Lego, in cui pochi elementi base permettono di realizzare una grande varietà di strutture, anche molto complesse. E' in questa duttilità e generalità che risiede gran parte della potenza del processo di modellizzazione.

TEMI Laboratori M&R 2008-09							
Segmento consigliato	**Livello scolare**	**3 M**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**
A0	**Equilibrio e ripartizione** Riferimenti disciplinari: Proporzioni, percentuali, proporzionalità diretta e inversa, ripartizione semplice e composta Metodologia: dai giochi matematici alle strutture matematiche e ai modelli	•	•				
A1	**Corrispondenze e codici del quotidiano** Riferimenti disciplinari: Corrispondenze biunivoche. Relazioni di equivalenza. Unità di misura e scale	•	•	•			
A2	**Rappresentazione grafica della realtà** Riferimenti disciplinari: Sistemi di riferimento. Pendenza. Massimo e minimo. Crescenza e decrescenza. Metodologia: matematica con il giornale in classe		•	•			
B1	**Fenomeni e funzioni lineari** Riferimenti disciplinari: Equazione della retta. Sistemi lineari			•	•		
B2	**Dal lineare al non lineare** Riferimenti disciplinari: Parabola. Iperbole. Concavità /convessità. Equazioni e disequazioni di II grado			•	•		
C1	**Processi iterativi** Riferimenti disciplinari: Formula chiusa e formula aperta in una sequenza induttiva.					•	•
C2	**Forme e figure frattali** Riferimenti disciplinari: Trasformazioni geometriche. Comportamento asintotico					•	•
D1	**Crescenza e decadimento** Riferimenti disciplinari: Funzioni polinomiali, esponenziale e logaritmo. Equazioni e disequazioni algebriche e trascendenti					•	•
E1	**Fenomeni di evoluzione** Riferimenti disciplinari: Funzione logistica. Comportamento asintotico.					•	•

INDICE

Capitolo 0

Equilibrio e ripartizione

Questo capitolo è dedicato agli studenti più giovani che partecipano ai laboratori Matematica&Realtà.
Per loro intendiamo sviluppare un percorso a zig-zag fra mondo reale e mondo matematico partendo da questioni più giocose ed accattivanti come i giochi o le gare di matematica.
Dietro molti quesiti proposti nelle varie competizioni si *nascondono* infatti le strutture e i concetti matematici che fanno parte del curricolo della scuola dell'obbligo.

Così giocando … si entra nel mondo matematico e si può anche interagire con quello reale.
I giochi possono essere la chiave che apre il *giardino segreto* della matematica e aiuta ad entrare nella dinamica della modellizzazione della realtà.

0.1 Sezione giochi

Proponiamo alcuni quesiti tratti da varie gare di Matematica, che forniscono alcuni interessanti spunti didattici. Nella *soluzione proposta* per ciascun quesito metteremo in evidenza quale sia la competenza/conoscenza matematica coinvolta.

0.1.1 Le scarpe

[Fonte: Gare di Matematica Città di Terni, 2008]

Un negoziante di scarpe, sotto le feste, aumenta tutti i prezzi del 20%. Dopo le feste abbassa i nuovi prezzi del 20%.
Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era 80,00 euro, il prezzo finale è:

a) 82,00 euro **b**) 80,00 euro **c**) 78,20 euro
d) 76,80 euro **e**) nessuna delle precedenti risposte

Una soluzione

Schematizziamo il processo mediante una tabella

Prezzo iniziale	**Prezzo aumentato** $+20\%$	**Prezzo ribassato** -20%
100	$100 \cdot \frac{100+20}{100} = 120$	$120 \cdot \frac{100-20}{100} = 96$

Pertanto un prezzo iniziale di 100 €, dopo le due operazioni, si riduce a 96 €. Di conseguenza un paio di scarpe del costo iniziale di 80,00 €, avrà come prezzo finale quello stabilito dalla proporzione:

$$100 : 96 = 80 : \textit{prezzo finale}$$

da cui

$$\textit{prezzo finale} = \frac{80 \cdot 96}{100} = 76,80$$

Chiave della soluzione

Proporzionalità diretta.

0.1.2 Acqua e ghiaccio

[Fonte: Gare di Matematica Città di Terni, 2003]

L'acqua, congelando, aumenta di 1/11 il proprio volume.
Di quanto diminuisce il volume del ghiaccio quando, fondendo, ritorna acqua?

a) 1/10 **b**) 1/11 **c**) 1/12 **d**) 1/13 **e**) 1/14

Una soluzione

La relazione fra il volume dello stato liquido e il volume dello stato solido dell'acqua è sintetizzata nella tabella seguente

volume del liquido	volume del solido
1	$1+\frac{1}{11}$
volume incognito	1

Si tratta pertanto di determinare il quarto proporzionale seguente

$$1:\left(1+\frac{1}{11}\right)=volume\,incognito:1$$

da cui

$$volume\,incognito=\frac{1}{1+\frac{1}{11}}=\frac{11}{12}$$

In definitiva un volume unitario di ghiaccio, fondendo, produce un volume di acqua pari a 11/12 del volume, **riducendosi pertanto di** 1/12.

Chiave della soluzione

Proporzionalità diretta.

0.1.3 Il ciclista

[Fonte: Enigmi www.chiesi.net/home/ita/giochi.html]

Un ciclista scala una montagna alla media di $20\,km/h$; giunto in cima, gira la bicicletta e riscende a valle (seguendo la stessa strada) ad una media di $60\,km/h$.

Qual è la velocità media complessiva del ciclista?

Risposta errata

La risposta *più frequente* al quesito è la media aritmetica ovvero

$$\frac{20+60}{2}=40 \quad km/h.$$

In tal modo assumiamo implicitamente di essere in presenza di un fenomeno lineare.

Soluzione esatta

In realtà dalla relazione $velocità = spazio/tempo$, si ottiene

$$spazio = velocità\ per\ tempo \quad \text{cioè} \quad s = v\,t.$$

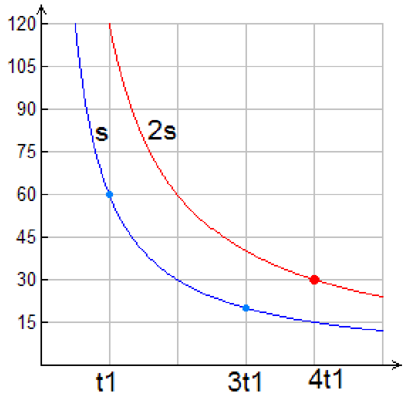
A parità di spazio quindi (la spazio di scalata coincide con quello di discesa), le velocità sono *inversamente proporzionali* ai rispettivi tempi.

Il rapporto dei tempi $\frac{tempo\,di\,salita}{tempo\,di\,discesa}$ è l'inverso del rapporto delle velocità $\frac{velocit\grave{a} di salita}{velocit\grave{a} di discesa}=\frac{20}{60}=1/3$. Si ha quindi

$$\frac{tempo\,di\,salita}{tempo\,di\,discesa}=3$$

Denotato con $\overline{t}$ il tempo impiegato per la discesa, la situazione può essere sintetizzata nella tabella seguente e visualizzata nel grafo a lato.

velocità v	tempo t	spazio s
20	$3\,\overline{t}$	$60\,\overline{t}$
60	$\overline{t}$	$60\,\overline{t}$



Conclusione

La **velocità media** è allora

$$v_m=\frac{120\,\overline{t}}{4\,\overline{t}}=30 \quad km/h$$

Chiave della soluzione

Proporzionalità inversa.

0.1.4 Il ritardatario

[Fonte: Gare di Matematica Città di Terni, 2005]

Nella classe di Luca molti ragazzi hanno preso la brutta abitudine di entrare in classe in ritardo.
L'insegnante propone un patto per i 25 giorni di scuola che mancano alle vacanze di Pasqua: alla fine del periodo stabilito darà ad ogni alunno 3 caramelle per ogni giorno in cui è arrivato puntuale e ne chiederà 12 per ogni giorno di ritardo.
Luca, che è stato presente tutti e 25 i giorni, esclama: "non ho ricevuto né pagato caramelle" Quanti giorni è arrivato in ritardo?

Una soluzione

Iniziamo con una "proiezione" sintetizzata nelle tabelle

Giorni di ritardo	penalità
1	12
2	24
3	36
4	48

Giorni di puntualità	premio
1	3
2	6
3	9
4	12

Indicato con r il numero dei giorni di ritardo e con p il numero dei giorni di puntualità, si ha quindi

Giorni ritardo	penalità	Giorni puntualità	premio
r	12r	p	3p

Poiché Luca non ha ricevuto, né pagato caramelle, deve esserci equilibrio fra premio e penalità:

$$3p = 12r$$

da cui

$$\frac{p}{r} = \frac{12}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad p : r = 12 : 3$$

da cui, applicando la proprietà del componendo, si deduce

$$(p + r) : r = (12 + 3) : 3 \qquad\qquad 25 : r = 15 : 3$$

$$r = \frac{25 \cdot 3}{15} = 5 \qquad\qquad p = 20$$

Conclusione

In definitiva il rapporto $\frac{12}{3}$ fra la penalità e il premio è pari al rapporto inverso fra i giorni di ritardo $r = 5$ e i giorni di puntualità $p = 20$ ovvero $\frac{12}{3} = \frac{1}{\frac{5}{20}}$.

Chiave della soluzione

Proporzionalità inversa.

0.1.5 Le paghette congrue

[Fonte: Gare di Matematica Città di Terni, 2008]

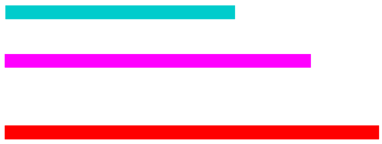
La famiglia Bianchi è costituita da padre, madre e tre figli: Marco, Elisa e Francesco, rispettivamente di età

11 anni e 4 mesi; 15 anni e 1 mese; 18 anni e 5 mesi.

I genitori desiderano distribuire a ciascun figlio una paghetta settimanale **direttamente proporzionale alle età di ognuno**. La somma totale messa a disposizione settimanalmente è di 100.00 €. Trovare la somma spettante a ciascun figlio. (spiegare il procedimento e mostrare i passaggi)

Una soluzione

Una rappresentazione grafica ci consentirà di capire meglio il problema e risolvere agevolmente la questione.
Per una corretta ripartizione è necessario confrontare le età dei tre ragazzi, che valutiamo in *mesi*.



Marco: 11 anni e 4 mesi = 136 mesi

Elisa: 15 anni e 1 mese = 181 mesi

Francesco: 18 anni e 5 mesi = 221 mesi

totale 538 mesi

somma totale 100,00 euro

Si ottiene quindi: **valore dell'unità di ripartizione 100:538 = 0,18587**

A questo punto è immediato calcolare la ripartizione della somma

Marco

$0{,}18587 \cdot 136 \cong 25{,}278 \cong 25{,}28$ €

Elisa

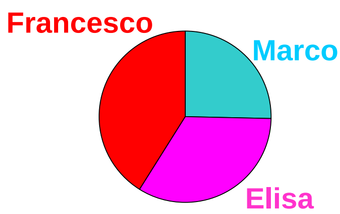
$0{,}18587 \cdot 181 \cong 33{,}642 \cong 33{,}64$ €

Francesco

$0{,}18587 \cdot 221 \cong 41{,}077 \cong 41{,}08$ €

Conclusione

Marco	*Elisa*	*Francesco*
25,28	*33,64*	*41,08*



Chiave della soluzione

Ripartizione di una risorsa in proporzione ad una classe di grandezze assegnate.

0.2 Sezione Strutture matematiche

Le strategie messe in atto per la soluzione dei quesiti proposti nel paragrafo precedente hanno coinvolto la proporzionalità diretta o inversa fra grandezze.
Proponiamo qui un approfondimento di questa *conoscenza matematica*.

0.2.1 Grandezze direttamente proporzionali

Tornando ai quesiti del paragrafo precedente, sono grandezze direttamente proporzionali:
$\mathfrak{A}$: le età
$\mathfrak{B}$: le paghette settimanali dei tre fratelli Bianchi, nel quesito 0.1.5 (Paghette congrue);
oppure
$\mathfrak{A}$: il numero dei giorni di ritardo
$\mathfrak{B}$: il numero delle caramelle da pagare come pegno
oppure
$\mathfrak{A}$: il numero dei giorni di puntualità
$\mathfrak{B}$: il numero delle caramelle che si ottengono come premio
del quesito 0.1.4 (Il ritardatario).

Nel contesto del quotidiano, si trovano facilmente esempi di grandezze proporzionali.
Proponiamo due esempi.

Frantoi aperti

In novembre si tiene in Umbria e in altre regioni italiane la manifestazione *Frantoi aperti* che invita alla visita dei frantoi e all'acquisto di olio genuino appena prodotto.
L'ultima raccolta è stata abbondante e il prezzo dell'olio è sceso fra 7,00 e 8,00 euro/kg.
I formati standard dei contenitori (lattine) sono: 500 g, 750 g, 1 *kg*, 5 *kg*, 10 *kg*.
Scriviamo una tabella dei prezzi per facilitare gli acquirenti nella scelta.

Le grandezze delle tre colonne sono direttamente proporzionali.

Quantità (*kg*)	Prezzo minimo €	Prezzo massimo €
1/2	3,50	4,00
3/4	5,25	6,00
1	7,00	8,00
5	35,00	40,00
10	70,00	80,00

On line lo spot fa boom

“ I soldi spesi in pubblicità su internet, in Italia, sono cresciuti del 68,8 per cento tra il giugno 2005 e il giugno 2006, arrivando a quota 153 milioni di euro nel primo semestre di questo anno. Nella storia di Internet non si era mai registrata una crescita simile” [Fonte: L’espresso, 24.08.2006]. Modellare il fenomeno, azzardando delle previsioni per la quota che verrà raggiunta a fine anno 2008.

Sintetizziamo i dati in una tabella

data	spesa in Ml €	% di crescita	spesa %
giugno 2005			
giugno 2006	153	+68,8	168,8
dicembre 2008			

La spesa in milioni di euro (seconda colonna) e la spesa percentuale rispetto la spesa del giugno 2005 (quarta colonna) costituiscono grandezze direttamente proporzionali.

Grandezze direttamente proporzionali: definizione

Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ due classi di grandezze in **corrispondenza biunivoca**.
Le classi $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ si dicono costituite da grandezze **direttamente proporzionali** se il rapporto di due elementi comunque scelti in $\mathfrak{A}$ è pari al rapporto dei corrispondenti elementi in $\mathfrak{B}$, in altre parole la corrispondenza biunivoca fra le classi conserva il rapporto fra coppie di elementi corrispondenti (naturalmente supponiamo implicitamente che le classi non contengano elementi nulli).

elementi in classe $\mathfrak{A}$	elementi in classe $\mathfrak{B}$
a_1	b_1
a_2	b_2
$\cdots$	$\cdots$
a_n	b_n

In altre parole sussistono le proporzioni

(0.1) $$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 \qquad a_2 : a_3 = b_2 : b_3 \qquad \cdots$$

In virtù della **proprietà del permutare** si deduce

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 \qquad a_2 : b_2 = a_3 : b_3 \qquad \cdots$$

da cui

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \cdots = a_n : b_n$$

Poiché elementi corrispondenti hanno rapporto costante, in un riferimento cartesiano le coppie di elementi corrispondenti $\left(a_i, b_i\right)$ rappresentano punti allineati (con l'origine), in forza del teorema di Talete.
Applicando ripetutamente la proprietà del componendo alle proporzioni (1) si deduce

$$a_1 : (a_1 + a_2 + ... + a_n) = b_1 : (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

da cui

(0.2) $$a_1 : b_1 = (a_1 + a_2 + ... + a_n) : (b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

In altre parole le **somme di un numero qualsiasi di elementi corrispondenti sono nello stesso rapporto di due qualunque elementi corrispondenti**.
In maniera compatta scriveremo

(0.2') $$a_j : b_j = \sum_i a_i : \sum_i b_i$$

0.2.2 Grandezze inversamente proporzionali

Il Gioco 0.1.8 (Il ciclista) coinvolge due classi di grandezze inversamente proporzionali (a parità di lunghezza del tragitto)

$\mathcal{A}$: la velocità

$\mathcal{B}$: il tempo impiegato.

Un altro esempio di grandezze inversamente proporzionali può essere tratto dall'esperienza quotidiana.

Tinteggiatura del Dipartimento di Matematica e Informatica

La superficie interna da tinteggiare del Dipartimento di Matematica e Informatica ammonta a circa 30500 mq. La superficie media tinteggiata in una giornata-uomo è di circa 120 mq. Alla gara di appalto, resa pubblica dal Dipartimento, hanno partecipato 3 ditte che propongono di impiegare rispettivamente 8, 15 e 17 operai. Stimare la durata del lavoro a seconda della ditta che eseguirà i lavori.

Il numero complessivo di giornate-uomo necessarie per il lavoro di tinteggiatura è 254 circa.
Il tempo richiesto è riportato in tabella.

operai impiegati	durata del lavoro in giorni	giornate-uomo totali
8	32	256
15	17	255
17	15	255

Il numero degli operai impiegati e la durata del lavoro in giorni costituiscono due classi di grandezze inversamente proporzionali.

Grandezze inversamente proporzionali: definizione

Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due classi di grandezze in **corrispondenza biunivoca**.
Le classi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono costituite da grandezze *inversamente proporzionali* se il rapporto di due elementi comunque scelti in $\mathcal{A}$ è pari al reciproco del rapporto dei corrispondenti elementi in $\mathcal{B}$, ovvero la corrispondenza biunivoca fra le classi **trasforma il rapporto** fra coppie di elementi in una classe **nel reciproco del rapporto** degli elementi corrispondenti .

elementi in classe $\mathcal{A}$	elementi in classe $\mathcal{B}$
a_1	b_1
a_2	b_2
$\dots$	$\dots$
a_n	b_n

In altre parole sussistono le proporzioni

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1 \qquad a_2 : a_3 = b_3 : b_2 \qquad \cdots$$

che possono anche scriversi

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1 = \frac{1}{b_1} : \frac{1}{b_2} \qquad a_2 : a_3 = b_3 : b_2 = \frac{1}{b_2} : \frac{1}{b_3} \qquad \cdots$$

(si è implicitamente assunto $b_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$)

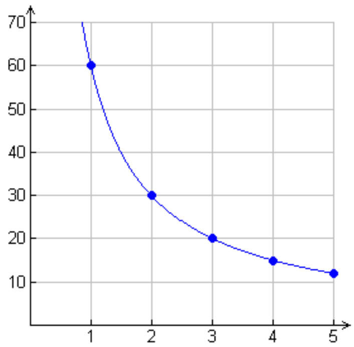
Di conseguenza **la inversa proporzionalità** fra le classi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ **è equivalente alla diretta proporzionalità** fra la classe $\mathcal{A}$ e la classe $\mathcal{B}^*$ costituita dai *reciproci* degli elementi di $\mathcal{B}$

elementi in classe $\mathcal{A}$	elementi in classe $\mathcal{B}^*$
a_1	$1/b_1$
a_2	$1/b_2$
$\dots$	$\dots$
a_n	$1/b_n$

In virtù della proprietà fondamentale delle proporzioni si deduce

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = \cdots = \text{costante}$$

Poiché elementi corrispondenti hanno ***prodotto costante***, in un riferimento cartesiano le coppie di punti corrispondenti (a_i, b_i) giacciono su una iperbole equilatera



0.2.1'. Grandezze riconducibili a proporzionali mediante traslazione

Analizziamo una situazione reale particolare per fare successivamente considerazioni di carattere generale.

Ricerca dispersi

Per effettuare la ricerca di persone disperse in aree remote gli operatori del gruppo "Search and rescue" negli Stati Uniti agiscono in questo modo:

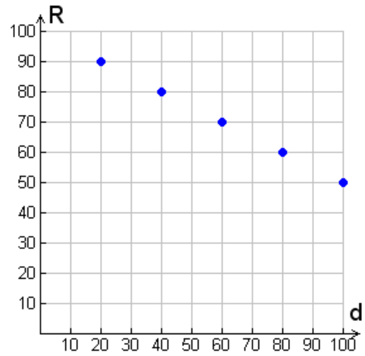
i singoli componenti di ciascun *team* setacciano l'area interessata movendosi lungo tragitti rettilinei, paralleli ed equidistanti.

L'esperienza ha dimostrato che la possibilità di trovare il disperso è correlata alla distanza fra due tragitti adiacenti.

Nella tabella è riportata la percentuale (approssimata) dei successi R relativi ad un tipo di territorio, in relazione a differenti distanze fra due tragitti.

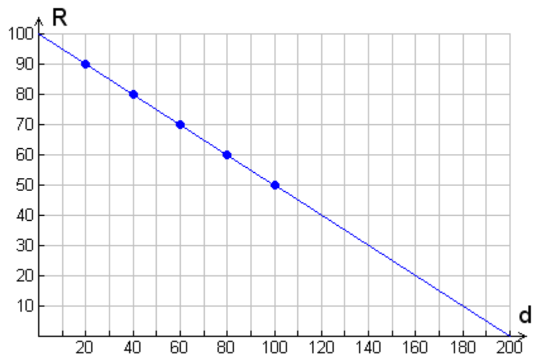
d (metri)	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**
R (%)	**90**	**80**	**70**	**60**	**50**

Se riportiamo i dati della tabella in un opportuno sistema di riferimento cartesiano (cfr. grafico a lato), si vede che i punti sono allineati.



Funzione decrescente

La percentuale di ritrovamenti è funzione decrescente della distanza d fra due tragitti, cioè *più distanti* sono le piste dei ricercatori, *più bassa* è la percentuale dei ritrovamenti.



Analizzando i dati in tabella, si vede facilmente che d ed R non sono grandezze direttamente proporzionali.

Tuttavia, in forza del teorema di Talete, **l'allineamento dei punti individua due classi di grandezze direttamente proporzionali.**

Come abbiamo già osservato, le coppie di elementi corrispondenti di due classi di grandezze direttamente proporzionali rappresentano in un riferimento cartesiano punti allineati con l'origine.
In altre parole si tratta di determinare una traslazione della retta in figura in modo che la sua traslata passi per l'origine.
Dalla figura si deduce che la traslazione cercata è $R^* = -100$.
Di conseguenza d e $R - R^*$ costituiscono classi di grandezze direttamente proporzionali.
Volendo così estrapolare i dati assegnati e determinare la percentuale di successi relativa alla distanza *d=150* m, si ottiene:

$$150 : 20 = (x - 100) : (90 - 100)$$

da cui

$$x = 25$$

Ancora per estrapolazione possiamo valutare la distanza d la cui percentuale di ritrovamenti è pressoché nulla:

$$d : 20 = (0 - 100) : (90 - 100)$$

da cui

$$d = 200.$$

Previsione

Sulla base dei dati, si può prevedere che, se la distanza fra due piste supera $200\,m$ la percentuale dei ritrovamenti è pressoché nulla.

Caso generale

Proporzionalità diretta. Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ due classi di grandezze in **corrispondenza biunivoca**.

elementi in classe $\mathfrak{A}$	**elementi in classe** $\mathfrak{B}$
a_1	b_1
a_2	b_2
$\dots$	$\dots$
a_n	b_n

Supponiamo che le coppie (a_i, b_i) di elementi corrispondenti delle due classi si distribuiscano su una retta (non parallela ad alcuno degli assi coordinati). In forza del teorema di Talete è possibile determinare una costante k in modo che la classe $\mathfrak{A}$ e la classe $\mathfrak{B}^*$ (ottenuta sommando k ad ogni elemento della classe $\mathfrak{B}$) costituiscono due classi di grandezze direttamente proporzionali.

elementi in classe $\mathcal{A}$	**elementi in classe** $\mathcal{B}$	**elementi in classe** $\mathcal{B}^*$
a_1	b_1	$b_1 + k$
a_2	b_2	$b_2 + k$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_n	b_n	$b_n + k$

Per determinare k è sufficiente ricorrere alla proporzione (0.1)

$$a_1 : a_2 = (b_1 + k) : (b_2 + k)$$

da cui, applicando lo scomponendo, si ottiene

$$(a_1 - a_2) : a_2 = (b_1 + k - b_2 - k) : (b_2 + k)$$

$$(a_1 - a_2) : a_2 = (b_1 - b_2) : (b_2 + k)$$

Risolvendo rispetto al quarto proporzionale $(b_2 + k)$ risulta

$$(b_2 + k) = \frac{a_2(b_1 - b_2)}{a_1 - a_2}$$

che finalmente fornisce il valore di k incognito:

$$k = \frac{a_2(b_1 - b_2)}{a_1 - a_2} - b_2$$

0.2.3 Ripartizione semplice e composta

Nei quesiti 0.1.4 (Il ritardatario) e 0.1.5 (Paghette congrue) abbiamo dovuto ripartire una quantità nota in parti proporzionali ed alcuni valori assegnati.
Proponiamo la formulazione generale della struttura matematica coinvolta.

Ripartizione semplice diretta

Sia Q una quantità fissata e sia $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ una sequenza di numeri reali non nulli assegnati.
Il problema consiste nel *ripartir*e la quantità Q in n *parti direttamente proporzionali* ai numeri della sequenza $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.
Indicate con $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ le parti (o quote) incognite, in forza della (0.2) deve risultare

$$x_1 : q_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i : Q$$

La ricerca del quarto proporzionale permette di calcolare la quantità incognita

(0.3) $$q_1 = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot Q$$

In modo analogo si calcolano le altre quantità incognite.
In conclusione si ha

(0.3’) $$q_j = \frac{Q}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot x_j \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

In altre parole la j-esima quota q_j si ottiene moltiplicando x_j per il rapporto $Q / \sum_{i=1}^{n} x_i$ (costante di proporzionalità fra le classi $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ e $\{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n\}$)

Ripartizione semplice inversa

Sia Q una quantità fissata e sia $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ una sequenza di numeri reali non nulli assegnati.
Il problema consiste nel *ripartire* la quantità Q in n *parti inversamente proporzionali* ai numeri della sequenza $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$.
Il problema è equivalente alla ripartizione della quantità Q in n *parti direttamente*

proporzionali ai numeri della sequenza $1/y_1,\ 1/y_2,\ 1/y_3\ ,\cdots, 1/y_n$.

Proponiamo l'applicazione ad un problema quotidiano.

Problemi condominiali: ripartizione delle spese generali

Il Sig. Sardi ha ricevuto dall'Amministratore del condominio in cui abita la convocazione dell'assembla per approvare il bilancio consuntivo dell'esercizio 2007. All'ordine del giorno è prevista la ripartizione delle spese generali sostenute nel corso del 2007 e tra gli allegati compare anche la proposta di ripartizione fatta dall'Amministratore.
Il Sig. Sardi, che è molto scrupoloso, vuole controllare la correttezza della ripartizione.
Come procederà?

Costruzione del modello

Le spese generali sono ripartite *in base ai millesimi* vedi schema a lato).

In altri termini, la cifra globale $2390,67$ € va suddivisa in 8 parti che siano **direttamente proporzionali** ai valori della colonna dei millesimi.

In forza della (0.2), la quota q spettante al Sig. Sardi deve soddisfare la proporzione

$$133{,}145 : q = 1000 : 2390,67$$

da cui

$$q = \frac{133{,}145 \times 2390,67}{1000} \cong 318,30 \quad €$$

nome	millesimi
Pallotta	117,942
Ronchi	116,754
Bianchi	122,337
Giubbetti	122,078
Brusca	127,146
Terranera	126,939
Cerini	133,660
Sardi	133,145
	1000,000
spese generali	2390,67 €

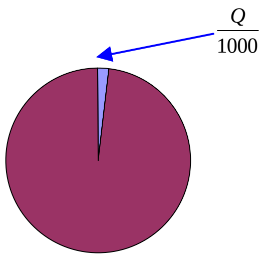
Per ottenere la ripartizione in modo veloce e "affidabile", conviene servirsi di un foglio elettronico applicando la (0.4) (cfr. tabella 1)

Tabella 1			
	A	B	C
1	**nome**	**millesimi**	**ripartizione**
2	Pallotta	117,942	281,96
3	Ronchi	116,754	279,12
4	Bianchi	122,337	292,47
5	Giubbetti	122,078	291,85
6	Brusca	127,146	303,96
7	Terranera	126,939	303,47
8	Cerini	133,660	319,54
9	Sardi	133,145	318,30
10	**Totale**	***1000,00***	**2390,67**

Il risultato è stato ottenuto applicando la formula

$$D_2 = B_2 * \$C\$10/1000$$

La quantità $\frac{Q}{1000}$ rappresenta un millesimo della somma Q da ripartire, quindi moltiplicando per i millesimi m_j si ottiene la quota ripartita q_j dovuta dal j-esimo condomino.



Il Sig. Sardi è soddisfatto perché può controllare la correttezza della ripartizione proposta dall'Amministratore.

Ancora un problema condominiale: spese istallazione ascensore

Purtroppo per il Sig. Sardi, le questioni … e gli esami non finiscono mai!
Infatti all'ordine del giorno della prossima riunione del condominio sono in discussione i **criteri per la ripartizione** della somma di 60000,00 € prevista per l'istallazione dell'ascensore.
Un amico lo ha messo in guardia dicendo: alcuni condomini vorranno far passare la proposta di ripartire le spese, *sia in base ai millesimi, che in base al piano*.
Sardi, che abita al quarto piano, teme di dover sborsare una grossa fetta della cifra!
Decide quindi di prepararsi alla riunione simulando la ripartizione secondo diversi criteri.

nome	**millesimi**	**piano**
Pallotta	117,942	1
Ronchi	116,754	1
Bianchi	122,337	2
Giubbetti	122,078	2
Brusca	127,146	3
Terranera	126,939	3
Cerini	133,660	4
Sardi	**133,145**	**4**
Totale	***1000,000***	

Prima di "buttarsi" nel calcoli però deve risolvere la questione che lo tormenta: come si fa a ripartire la cifra sia in base ai millesimi, che in base al piano?
Scartabellando i suoi vecchi libri di scuola trova il paragrafo: Ripartizione composta.

Ripartizione composta

Sia Q una quantità fissata e siano $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ e $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$ due sequenze di numeri reali assegnati.
Il problema consiste nel ripartire la quantità Q in n *parti direttamente proporzionali* sia ai numeri della sequenza $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, sia ai numeri della sequenza $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$.
In forza della (0.4) la j-esima quota q_j deve essere proporzionale sia ad x_j che ad y_j e quindi deve risultare

$$q_j = w\, x_j\, y_j$$

con w costante da determinare.
Posto

$$\mathcal{A}=\{x_1, x_2, ..., x_n\} \qquad \mathcal{B}=\{y_1, y_2, ..., y_n\} \qquad \mathcal{C}=\{x_1\, y_1,\ x_2\, y_2, ...,\ x_n\, y_n\}$$

Il problema è così ricondotto a ripartire la quantità Q in n *parti direttamente proporzionali agli elementi della classe* $\mathcal{C}=\{x_1\, y_1, x_2\, y_2, ..., x_n\, y_n\}$ ovvero in n *parti direttamente proporzionali ai numeri della sequenza* $x_1\, y_1,\ x_2\, y_2, ...,\ x_n\, y_n$ *dei prodotti.*

Indicate con $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ le parti (o quote) incognite, in forza della (0.2) deve risultare

$$x_1\, y_1 : q_1 = \sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_i) : Q$$

La ricerca del quarto proporzionale permette di calcolare la quantità incognita

(0.4) $$q_1 = \frac{x_1\, y_1}{\sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_i)} \cdot Q$$

In modo analogo si calcolano le altre quantità incognite.
La (0.3') può anche scriversi

(0.4') $$q_j = \frac{Q}{\sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_i)} \cdot (x_j\, y_j)$$

In altre parole la j-esima quota q_j si ottiene moltiplicando il prodotto $x_j\, y_j$ per il rapporto $w = Q / \sum_{i=1}^{n} (x_i\, y_i)$ (costante di proporzionalità fra le classi $\{x_1\, y_1, x_2\, y_2, x_3\, y_3, \cdots, x_n\, y_n\}$ e $\{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n\}$).

Il Sig. Sardi non vede l'ora di mettersi all'opera … Servendosi sempre dell'aiuto di un foglio elettronico, ottiene le seguenti proiezioni.

Ripartizione spese istallazione ascensore

Primo criterio Somma ripartita in proporzione ai millesimi.

Ripartizione secondo millesimi			
	A	B	C
1	**Nome**	**millesimi**	**ripartizione**
2	Pallotta	117,942	7076,51
3	Ronchi	116,754	7005,23
4	Bianchi	122,337	7340,21
5	Giubbetti	122,078	7324,67
6	Brusca	127,146	7628,75
7	Terranera	126,939	7616,33
8	Cerini	133,66	8019,59
9	**Sardi**	**133,145**	**7988,69**
10	**totale**	**1000,00**	**60000,00**
Formula utilizzata C2=B2*$C$10/$B$10			

Secondo criterio Somma ripartita in proporzione sia ai millesimi, sia al piano.

Ripartizione secondo millesimi x piano					
	A	B	C	D	E
1	**nome**	**millesimi**	**piano**	**millesimi x piano**	**ripartizione**
2	Pallotta	117,942	1	117,942	2771,8438
3	Ronchi	116,754	1	116,754	2743,92372
4	Bianchi	122,337	2	244,674	5750,26802
5	Giubbetti	122,078	2	244,156	5738,09411
6	Brusca	127,146	3	381,438	8964,46182
7	Terranera	126,939	3	380,817	8949,86723
8	Cerini	133,66	4	534,64	12564,9775
9	**Sardi**	**133,145**	**4**	**532,58**	**12516,5638**
10	**totale**	**1000,00**		**2553,001**	**60000,00**
Formule utilizzate D2=B2*C2 E2=D2*$E$10/$D$10					

Osserviamo che la quota di ciascun condomino varia a seconda del criterio adottato. In particolare notare la situazione di Pallotta (primo piano) e di Sardi (quarto piano).

Terzo criterio Il 50% della somma ripartita in proporzione ai millesimi e il restante 50% ripartito in proporzione sia ai millesimi, sia al piano.

Ripartizione 50% secondo millesimi e 50% secondo millesimi x piano							
	A	B	C	D	E	F	G
1	**nome**	**millesimi**	**50% secondo millesimi**	**piano**	**millesimi x piano**	**50% secondo millesimi x piano**	**ripartizione**
2	**Pallotta**	117,942	3538,26	1	117,942	1385,9219	4924,18
3	**Ronchi**	116,754	3502,62	1	116,754	1371,96186	4874,58
4	**Bianchi**	122,337	3670,11	2	244,674	2875,13401	6545,24
5	**Giubbetti**	122,078	3662,34	2	244,156	2869,04705	6531,38
6	**Brusca**	127,146	3814,38	3	381,438	4482,23091	8296,61
7	**Terranera**	126,939	3808,17	3	380,817	4474,93362	8283,10
8	**Cerini**	133,66	4009,80	4	534,64	6282,48873	10292,28
9	**Sardi**	**133,145**	**3994,35**	**4**	**532,58**	**6258,28192**	**10252,63**
10	**totale**	**1000,00**	**30000,00**		**2553,001**	**30000,00**	**60000,00**
Formule utilizzate C2=B2*$C$10/$B$10 E2=B2*D2 F2=E2*$F$10/$E$10 G2=C2+F2							

Alla luce di questa trattazione, si potrebbe rivedere il quesito delle paghette congrue (vedi 0.1.5).

0.1.5’ Paghette congrue

Elisa, che fra i tre fratelli è la più studiosa, propone di ripartire la somma dei 100 euro destinati alla loro paghette settimanali, sia in base all’età, sia in base al profitto scolastico. Trovare la somma spettante a ciascun figlio.

	età	**media scolastica**
Marco	**11a 4m**	**7,4**
Elisa	**15a 1m**	**9,1**
Francesco	**18a 5m**	**8,0**

Proponiamo un altro esempio reale di ripartizione composta.

Ripartizione del Fondo di Istituto (FIS) [Ist. Comprensivo De Filis TR]

personale	numero	ripartizione per numero	coeff. art. 82	prodotto	Ripartizione per numero e per art. 82
Docenti	106	26496,49	13,84	1467,04	28208,57
ATA	28	6999,07	9,82	274,96	5286,99
totale	134	33495,56		1742,00	33495,56

0.3 Sezione Modelli matematici

Proponiamo alcune questioni tratte dalla vita reale che possono essere affrontate mediante la costruzione di un modello matematico basato sulle strutture illustrate nel paragrafo precedente.

0.3.1 La mala education

La figura a lato illustrava un articolo di Paola Zanuttini sulle attitudini comportamentali degli adolescenti italiani.
[Fonte: Il Venerdì di Repubblica 24.11.2006]

"…bambini e adolescenti sono sempre più indisci-plinati, intolleranti, ben che vada indifferenti. Le statistiche confermano: i comportamenti trasgres-sivi sono sempre più considerati normali. Ma quale è la causa? Gli esperti concordano: troppo amore in famiglia. E troppa poca "guerra".

Sulla base dei dati (cfr. tabella alato), possiamo fare una previsione dell'evoluzione del fenomeno "trasgressione"
Osserviamo, in particolare i dati relativi a

- viaggiare nei mezzi pubblici senza biglietto
- rubare nei negozi
- compiere atti di *vandalisno*.

LA TRASGRESSIONE
Percentuale di ragazzi fra 15 e 20 anni che non escludono di poter attuare il comportamento indicato (trend 1996-2004)

	1996	2000	2004
Utilizzare materiale pirata	0	83	83
Viaggiare sui trasporti pubblici senza pagare	69	71	74
Fare a botte per far valere le proprie ragioni	42	38	41
Disegnare graffiti sui muri o sui mezzi pubblici	0	0	37
Prendere qualcosa in un negozio senza pagare	15	20	24
Danneggiare beni pubblici intenzionalmente	12	16	20

0.3.2 On line lo spot fa boom

"I soldi spesi in pubblicità su internet, in Italia, sono cresciuti del 68,8 per cento tra il giugno 2005 e il giugno 2006, arrivando a quota 153 milioni di euro nel primo semestre di quest'anno. Nella storia di internet non si era mai registrata una crescita simile". [Fonte: L'Espresso 24.8.2006]
Modellare la situazione.

0.3.3 Treni FCU più veloci

La ferrovia Centrale Umbra ha elaborato per il 2007-08 un progetto che si prefigge due obiettivi: migliorare gli standard di sicurezza della rete e innalzare la velocità di tracciato, con conseguente riduzione dei tempi di percorrenza. Spesa prevista 5 ML di euro. Nella tabella è riportato un prospetto di sintesi che illustra i miglioramenti previsti. [Fonte: Tutto Perugia, 14.12.2006]

		Tempo attuale (minuti)		Tempo previsto in futuro (minuti)	
	Distanza (km)	**Treno più veloce**	**Treno meno veloce**	**Treno più veloce**	**Treno meno veloce**
Ponte San Giovanni - San Sepolcro	69	69	80	61	75
Ponte San Giovanni - Terni	79	68	75	59	69

Secondo le dichiarazioni la realizzazione del progetto comporterà un innalzamento della velocità del tracciato. Ci chiediamo quale sia l'incremento della velocità media (assoluto e in percentuale rispetto quella attuale).

0.3.4 Adozioni internazionali

La linea spezzata della figura seguente descrive l'andamento delle domande di adozione internazionale in Italia nel periodo dal 2000 al I semestre del 2007. Fonte: La Repubblica,
Il grafico non è corretto, individuare l'errore e fornire quello esatto.

0.3.5 Moderno metodo di misura indiretta

Il Talete contemporaneo, armato di foto-camera digitale, vuole "confrontare" l'altezza di due *monumenti*: la *Lancia di luce* di Pomodoro e la *Penna* della fontana di Piazza Tacito a Terni.

Ipotizzate come procede il Talete contemporaneo e fate altrettanto per due monumenti della vostra città.

0.3.6 Altalena a Piazza Affari

Un “esperto del mondo della finanza”, intervistato nel corso di un notiziario serale a diffusione nazionale di venerdì 19 settembre, nell’intento di rassicurare i risparmiatori, ha affermato: “Il titolo Unicredit, dopo il crollo di giovedì 18 settembre, nella seduta di venerdì 19 settembre ha colmato le perdite, superando la quotazione a cui si era attestato martedì 16 settembre”. In accordo con il motto “verba volant, scripta manent”, sei d’accordo a sottoscrivere l’affermazione dell’esperto?

Quotazioni ufficiali titolo Unicredit a Piazza Affari		
data	variazione %	valore unitario azione
16/09/2008	/	3,623
18/09/2008	-12,69	
19/09/2008	+13,18	

0.3.7 Momento di una leva

Lo schiaccianoci, la stadera, la forza trasmessa da due ingranaggi (pedali della bicicletta) sono applicazioni del momento di una leva ove la forza e il braccio sono grandezze inversamente proporzionali.

Nota finale. Le risposte ai quesiti e lo sviluppo dei modelli proposti in questo capitolo saranno disponibili via via nel corso dei primi mesi dell’anno 2009 nel sito http://www.matematicaerealta.it alla voce Laboratori.